# *Лекция 9*

# Составное движение точки

**Абсолютное, относительное и переносное движение точки.**

**Связь абсолютной и относительной производных.**

**Теорема о сложении скоростей.**

Известно, что законы Механики выполняются только в инерциальной системе отсчета. Таковой, как мы знаем, можно считать гелиоцентрическую систему. Назовем ее ***абсолютной*** и свяжем с ней оси X,Y,Z. Движение точки М по отношению к абсолютной системе описывается радиусом-вектором и называется ***абсолютным***. Скорость и ускорение точки в абсолютном движении будем отмечать индексом “a”:

A

X

Z

Y

M

**r**

A

**r**

****

Рис.

1

x

y

z

Иногда движение точки удобнее описывать относительно «***несущего тела***», по которому движется точка (Рис.1).

Например, наше движение на автомобиле естественно описывать по отношению к Земле, а не к Солнцу.

Точно так же, движение пассажира, пробирающегося к выходу в трамвае, естественно описывать по отношению к трамваю (несущему телу), а не к Земле.

Движение точки по отношению к несущему телу называется ***относительным*** . Скорость и ускорение относительного движения точки будем отмечать индексом “r”:

Свяжем с несущим телом оси . Относительное движение зададим проекциями относительного радиуса - вектора на подвижные оси

Пусть движение несущего тела в «абсолютной» системе отсчета задано координатами полюса А и углами Эйлера (см Сферическое движение),

Из этих функций можно найти скорость и ускорение полюса , угловую скорость и ускорение несущего тела.

***Переносной скоростью и ускорением***

точки М называется скорость и ускорение той точки **тела**, с которой в данный момент совпадает точка М. Иначе говоря, точки М, зафиксированной в данный момент на теле (метод остановки).

Найдем абсолютную скорость и ускорение точки М по известным характеристикам переносного и относительного движений.

Из Рис.1 следует

Рисунок и формула такие же, как в свободном движении тела, но с одним принципиальным отличием. Здесь вектор **** не является вектором в теле. Его модуль изменяется, поскольку точка М движется по телу. По этой причине к вектору не применима формула Эйлера. Представим вектор в подвижной системе отсчета через закон относительного движения

Здесь - орты подвижной системы, вращающиеся вместе с телом.

Дифференцируя (1) по времени, находим

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Дифференцируя (3) по времени, находим:

Орты являются векторами в несущем теле, поэтому их производные находим по формуле Эйлера

Таким образом,

Здесь введено обозначение ***относительной производной***

Она характеризует изменение вектора ****при остановленном несущем теле.

Формула (6) выражает **теорему о связи производных**:

***Абсолютная производная от вектора, заданного в подвижной системе, равна относительной производной плюс векторное произведение угловой скорости системы на вектор***

Заметим, что при поступательном движении системы (= 0) производные совпадают.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Формула (4) приобретает вид

В подвижной системе столбец проекций относительной производной имеет простой вид

Поэтому формулу (8) запишем в матричном виде в подвижных осях

Если в данный момент зафиксировать точку на теле, то

и абсолютная скорость по определению станет переносной.

(10)

Относительную скорость найдем, остановив тело (**VA,  = 0**)

Таким образом, пришли к ***теореме о сложении скоростей***  в векторной форме

***Абсолютная скорость точки равна***

***векторной сумме ее переносной и относительной скоростей***.

***Пример***

Диск равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью = 2c-1. По радиусу диска движется точка М по закону *y* = 3t2 -2t (м). Найти абсолютную ско рость точки в момент времени t1=1cек.



z

Сначала решим задачу ***методом остановки***. Метод заключается в том, что при изучении относительного движения мысленно останавливается переносное движение, и наоборот. Это соответствует определениям этих движений.

***Относительное движение (ω = 0)***

Мысленно остановим вращение диска и найдем проекцию относительной скорости на подвижную ось у, продифференцировав закон относительного движения:

***Переносное движение (y=Const)***

Фиксируя точку М на расстоянии , найдем ее переносную скорость во вращении

***Теорема о сложении скоростей***

в проекциях на подвижные оси дает

Найдем абсолютную скорость ***матричным методом***.

Находим проекции абсолютной скорости на подвижные оси:

Видим , что результаты совпадают с методом остановки.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Теорема о сложении ускорений**

Дифференцируя по времени теорему о сложении скоростей в векторной форме (10) ,

находим

Векторы **** и **Vr** заданы в подвижной системе, поэтому их абсолютные производные находятся по теореме о связи производных

Замечательно, что в этих выражениях совпадают слагаемые  **,** полученныеиз двух, совершенно разных формул: и  **.**  В первом случае произведение характеризуетизменение переносной вращательной скорости ввиду изменения относительного положения точки

Во втором случае произведение характеризует изменение направления вектора относительной скорости при вращении несущего тела с угловой скоростью

Таким образом, произведения характеризуют взаимное влияние относительного движения на вращательную переносную скорость и переносного вращения на относительную скорость. Поразительно то, что эти влияния совершенно одинаковы!

Получаем

Объединяя одинаковые слагаемые, находим

Формула (16) в матричной форме в подвижной системе, где просто записывается последнее слогаемое:

(17)

Чтобы найти переносное ускорение, зафиксируем по определению точку на несущем теле.

Тогда и абсолютное ускорение становится переносным по определению

(18)

Видим, что формула (18) совпадает с формулой ускорения точки тела, как и должно быть по определнию.

Остановив несущее тело (), найдем относительное ускорение

Слагаемое в (16)

(20)

называется ***добавочным или Кориолисовым ускорениям***.

Приходим к теореме Кориолиса:

Видим, что в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений не равна, в общем случае, абсолютному ускорению. Именно поэтому Кориолисово ускорение называют ***добавочным***.

Ускорение названо по имени французского учёного [Гюстава Гаспара Кориолиса](http://waprik.ru/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D1%81,_%D0%93%D1%8E%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%B2_%D0%93%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B0%D1%80), впервые её описавшего. Ускорение Кориолиса было получено Кориолисом в 1833 году, [Гауссом](http://waprik.ru/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81,_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB_%D0%A4%D1%80%D0%B8%D0%B4%D1%80%D0%B8%D1%85) в [1803 году](http://waprik.ru/wiki/1803_%D0%B3%D0%BE%D0%B4) и [Эйлером](http://waprik.ru/wiki/%D0%AD%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80,_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4) в [1765 году](http://waprik.ru/wiki/1765_%D0%B3%D0%BE%D0%B4) (!).

Необходимость кориолисова ускорения становится очевидной из следующего простого примера. Платформа радиуса R равномерно вращается с угловой скоростью ω (Рис.3). Человек бежит по краю платформы против ее вращения с относительной скоростью



При этом, по отношению к Земле человек неподвижен, и его абсолютное ускорение равно нулю. Однако сумма переносного и относительного ускорений не равна нулю.

Действительно, относительное ускорение нормальным ускорением точки, направлено к центру платформы и равно:

Переносное ускорение точки, будучи осестремительным ускорением точки обода, тоже направлено к центру платформы и равно относительному ускорению

Сумма ускорений

направлена к центру колеса и не равна нулю.

Только наличие Кориолисова ускорения обеспечиваетотсутствие абсолютного ускорения. Вектор угловой скорости направлен за чертеж, значит направлено от центра и по модулю равно

Вот теперь, по теореме о сложении ускорений абсолютное ускорение точки обратится в ноль. В проекции на радиус:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Кориолисово ускорение

направлено по правилу правого винта и обращается в ноль в трех случаях:

1. Несущее тело движется поступательно или меняет направление вращения (
2. Относительная скорость точки параллельна угловой скорости тела ****Так при движении по меридиану в момент пересечении экватора Земли.
3. Точка остановилась на несущем теле ()

На основании сказанного делаем вывод, что Кориолисово ускорение характеризует:

1. Влияние переносного вращения несущего тела () на относительную скорость . Зафиксированный в несущем теле вектор изменяется со скоростью:
2. Влияние относительного движения на переносную вращательную скорость. При фиксированной угловой скорости , относительная производная

дает вторую составляющую Кориолисова ускорения



***Пример***

Рассмотрим тот же пример, что и в теореме о сложении скоростей.

= 2c-1. *y* = 3t2 -2t (м).

Сначала применим ***метод остановки*** (Рис.4)

***Относительное движение (ω=0)***

***Переносное движение ()***

***Кориолисово ускорение***

Теорема Кориолиса в проекциях на подвижные оси

Тот же ответ получим ***матричным методом***.

В подвижных осях:

Видим, что результаты двух методов совпадают.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Преимуществом** матричного метода является возможность вычислять искомые величины в произвольный момент времени без векторных построений.